ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE
ECOLE POLYTECHNIQUE
(OPTION T.A.)

CONCOURS D'ADMISSION 1995

MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME ÉPREUVE
OPTION P'
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie : MATHÉMATIQUES I I P'.
L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de l'option P', comporte 5 pages.

Ce problème est consacré à l'étude d'un ensemble G de matrices g carrées d'ordre 2 définies par la relation suivante :

$$g = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} ,$$

où α et β sont deux réels ; α est différent de 0 : $(\alpha , \beta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

Les propriétés de ces matrices sont utilisées pour étudier deux applications :
l'une, $\Phi(g)$, définie dans l'espace des polynômes réels, associe à un polynôme P le polynôme Q défini par la relation : $Q(x) = P(\alpha x + \beta)$
l'autre, $\Psi(g)$, est une application définie dans l'espace des suites réelles.

Première partie

Le but de cette partie est de montrer la structure de groupe multiplicatif de G et de caractériser les morphismes de ce groupe dans le groupe multiplicatif $(\mathbb{R}^*, .)$.

1°) Démontrer que l'ensemble G est, pour le produit des matrices, un groupe noté (G, .).

2°) Déterminer, pour toute matrice g qui appartient à G et dont le déterminant est différent de 1, une matrice h appartenant à G, de déterminant égal à 1, telle que la matrice $h^{-1}.g.h$ soit une matrice diagonale.

I-3°) Soit g une matrice qui appartient à G et dont le déterminant est égal à 1 ; démontrer que, si cette matrice est distincte de la matrice unité I_2, il existe une unique matrice h diagonale appartenant à G telle que la matrice $h^{-1}.g.h$ soit égale à la matrice triangulaire t dont les éléments valent 0 ou 1 :

$$h^{-1}.g.h = t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

I-4°) Soit φ un morphisme du groupe multiplicatif $(\mathbb{R}^*, .)$; soit det l'application de G dans $\mathbb{R}^*$: $g \mapsto \det(g)$. Démontrer que l'application composée $u = \varphi \circ \det$ est un morphisme du groupe (G, .) dans le groupe multiplicatif $(\mathbb{R}^*, .)$.

I-5°) Soit D le sous-ensemble des matrices diagonales de G. Les matrices de D seront notées :

$$d_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \text{ où } \alpha \text{ est un réel distinct de 0 .}$$

a. Démontrer que (D, .) est un sous-groupe de (G, .). Démontrer qu'il est isomorphe au groupe multiplicatif $(\mathbb{R}^*, .)$. Préciser un isomorphisme J de $(\mathbb{R}^*, .)$ sur (D, .).

b. Soit u un morphisme de (D, .) sur $(\mathbb{R}^*, .)$. Démontrer que le morphisme u s'exprime à l'aide de l'application composée $\varphi \circ \det$ où φ est un morphisme du groupe multiplicatif $(\mathbb{R}^*, .)$ et det l'application : $g \mapsto \det(g)$.

I-6°) Soit u un morphisme de (G, .) sur $(\mathbb{R}^*, .)$.

a. Démontrer que la valeur prise par ce morphisme sur une matrice g de G de déterminant différent de 1 est égale à la valeur prise par u sur une matrice diagonale semblable à la matrice g.

b. Comparer la valeur prise par ce morphisme u sur une matrice g de G de déterminant égal à 1, distincte de I_2, à la valeur prise sur la matrice t, définie à la question I-3° ; préciser u(t). En déduire la valeur u(g) pour toute matrice de déterminant égal à 1.

c. Démontrer que toute matrice g de G, distincte de I_2, est égale au produit d'une matrice de G dont le déterminant est égal à 1 et d'une matrice diagonale.

d. Démontrer qu'il existe un morphisme φ de $(\mathbb{R}^*, .)$ tel que le morphisme u soit l'application composée de φ et de det : $\varphi \circ \det$.

L'objet de cette partie est l'étude d'endomorphismes de l'espace vectoriel des polynômes réels $\mathbb{R}[X]$ définis à partir de matrices du groupe G. Étant donnée une matrice g de G, associons à tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, le polynôme $\Phi(g)(P)$, défini par la relation : $x \mapsto P(\alpha x+\beta)$. Les réels α et β sont les deux réels qui servent à définir la matrice g.

II-1°) Démontrer que l'application $\Phi(g) : P \mapsto \Phi(g)(P)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$. Comparer pour deux matrices g et h de G le polynôme $\Phi(g.h)(P)$ et le polynôme $\Phi(g)(\Phi(h)(P))$.
Démontrer que l'application $g \mapsto \Phi(g)$ est un morphisme injectif du groupe (G, .) dans le groupe linéaire de l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.

II-2°) Soit n un entier supérieur ou égal à 1.

a. Démontrer que le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n, est stable par $\Phi(g)$. Soit $\Phi_n(g)$ la restriction de $\Phi(g)$ à $\mathbb{R}_n[X]$.

b. Soit $M_n(g)$ la matrice associée à l'application linéaire $\Phi_n(g)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Donner l'expression de l'élément $m_{p,q}$ de cette matrice en numérotant les lignes et les colonnes de 0 à n. Préciser ses valeurs propres. Quelle est la matrice $M_n(g)$, lorsque g est une matrice diagonale ?

c. Démontrer, en utilisant les résultats des questions I-2° et II-1°, que si le déterminant de la matrice g est différent de 1, l'application linéaire $\Phi_n(g)$ est diagonalisable. Déterminer la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ à une base de vecteurs propres ; en déduire une base de vecteurs propres.

d. La matrice g est supposée avoir un déterminant égal à 1 et être différente de la matrice I_2. Déterminer le ou les vecteurs propres de l'application $\Phi_n(g)$.
Soit k un entier compris entre 1 et n ; soit Q_k le polynôme $\Phi_n(g)(X^k)-X^k$. Déterminer le sous-espace vectoriel engendré par ces polynômes.
Démontrer l'existence d'une suite de polynômes $P_0, P_1, \ldots, P_n$ de l'espace $\mathbb{R}_n[X]$ qui vérifient les relations :

$P_0 = 1$; pour tout entier k, $1 \leq k \leq n$, $\Phi_n(g)(P_k) = P_k + P_{k-1}$ et $P_k(0) = 0$.

Préciser le degré et le coefficient du terme dominant de P_k. Démontrer que cette suite de polynômes est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$. Quelle est la matrice associée à l'application $\Phi_n(g)$ dans cette base ?

Troisième partie.

Soit $\mathcal{Y}$ l'ensemble des suites réelles : $\mathcal{Y} = \{ A \mid A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, a_n \in \mathbb{R} \}$. Il est admis que $\mathcal{Y}$ est un espace vectoriel réel. Étant donnée une matrice g de G, associons à toute suite $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de l'espace $\mathcal{Y}$ la suite $\Psi(g)(A) = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par les relations :

$$b_0 = a_0 \text{ ; pour tout entier } n, n \geq 1, \qquad b_n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p \alpha^p \beta^{n-p} a_p .$$

Les réels α et β sont les deux réels qui définissent la matrice g. L'objectif final est d'étudier, pour une suite A donnée, la convergence de la série entière définie à partir de la suite $\Psi(g)(A)$.

III-1°) Démontrer que l'application $\Psi(g) : A \mapsto \Psi(g)(A)$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{Y}$.

III-2°) Désignons par A_n et B_n les matrices colonnes d'éléments a_p, $0\leq p\leq n$, et b_p, $0\leq p\leq n$.

$$A_n = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} ; \quad B_n = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Exprimer la matrice M telle que la relation : $B_n = M.A_n$ ait lieu, en fonction de la matrice $M_n(g)$. Démontrer, pour deux matrices g et h quelconques de G, la relation :

$$\Psi(g.h) = \Psi(h)\circ\Psi(g) .$$

En déduire que les applications $\Psi(g)$, lorsque g varie dans G, sont des automorphismes de l'espace vectoriel $\mathcal{Y}$.

III-3°) Exemples :

a. Déterminer la suite $\Psi(d_\alpha)(A)$ lorsque la matrice d_α de G est diagonale et la suite A est quelconque dans $\mathcal{Y}$.

b. La matrice g étant donnée dans G ; déterminer la suite $B = \Psi(g)(A)$ lorsque la suite A est la suite géométrique $a_n = r^n$, $n\in\mathbb{N}$; r est un réel donné différent de 0. Déterminer les rayons de convergence des séries entières de termes généraux : $a_n x^n$, $n\in\mathbb{N}$ et $b_n x^n$, $n\in\mathbb{N}$; calculer leurs sommes :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad ; \quad T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n .$$

Déterminer de même l'image $D = \Psi(g)(C) = (d_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de la suite arithmétique C de terme général $c_n = n$, $n\in\mathbb{N}$. Déterminer les rayons de convergence des séries entières de termes généraux $c_n x^n$ et $d_n x^n$, $n\in\mathbb{N}$, et les sommes de ces deux séries.

III-4°) Dans cette question g est une matrice de G telle que les réels α et β vérifient les inégalités : $\alpha > 0, \beta \geq 0$.

a. Démontrer qu'il existe deux matrices c_ρ et d_σ appartenant à G dont le produit $c_\rho.d_\sigma$ est égal à g : $g = c_\rho.d_\sigma$, telles que :

• la matrice c_ρ s'écrit : $c_\rho = \begin{pmatrix} 1 & 1-\rho \\ 0 & \rho \end{pmatrix}$ avec : $0 < \rho \leq 1$,

• la matrice d_σ est une matrice diagonale de G.

b. Soit c_ρ la matrice définie ci-dessus ; ρ un réel tel que : $0 < \rho \leq 1$; démontrer que, si A est une suite convergente de limite ℓ, la suite $B = \Psi(c_\rho)(A)$ est convergente et a même limite.

c. Déduire des résultats précédents que, si la suite A est une suite convergente de limite ℓ, le terme général b_n, $n \in \mathbb{N}$, de la suite $B = \Psi(g)(A)$ peut s'écrire :

$$b_n = c_n r^n ,$$

où c_n, $n \in \mathbb{N}$, est le terme général d'une suite convergente de limite ℓ et r un réel.

Le but des deux dernières questions est de démontrer que, si la série entière de terme général $a_n x^n$, $n \in \mathbb{N}$, a un rayon de convergence strictement positif, la série entière de terme général $b_n x^n$, $n \in \mathbb{N}$, où la suite $B = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite $\Psi(g)(A)$, a, elle aussi, un rayon de convergence strictement positif.

III-5°) Soient $A = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{Y}$, g une matrice de G et x_0 un réel strictement positif. Désignons par U la suite de terme général $u_n = a_n(x_0)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Soit B la suite image par l'application $\Psi(g)$ de la suite A : $B = \Psi(g)(A) = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

a. Démontrer qu'il existe un réel α tel que la suite U soit l'image par l'application $\Psi(d_\alpha)$ de la suite A : $U = \Psi(d_\alpha)(A)$.

b. Démontrer qu'il existe une matrice h de G telle que la suite B soit l'image par l'application $\Psi(h)$ de la suite U.

c. Supposons que les réels α et β de la matrice g vérifient les inégalités : $\alpha > 0, \beta \geq 0$ et que la suite U tende vers 0. Soit x un réel strictement positif ; donner une condition suffisante sur x pour que la suite de terme général $b_n x^n$, $n \in \mathbb{N}$, tende vers 0.

II-6°) Soit g une matrice quelconque de G ; déduire des résultats précédents que, si la série entière de terme général $a_n x^n$, $n \in \mathbb{N}$, a un rayon de convergence R_A strictement positif, la série entière de terme général $b_n x^n$, $n \in \mathbb{N}$, où la suite $B = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite $\Psi(g)(A)$, a, elle aussi, un rayon de convergence R_B strictement positif ; donner un minorant du rayon de convergence R_B.